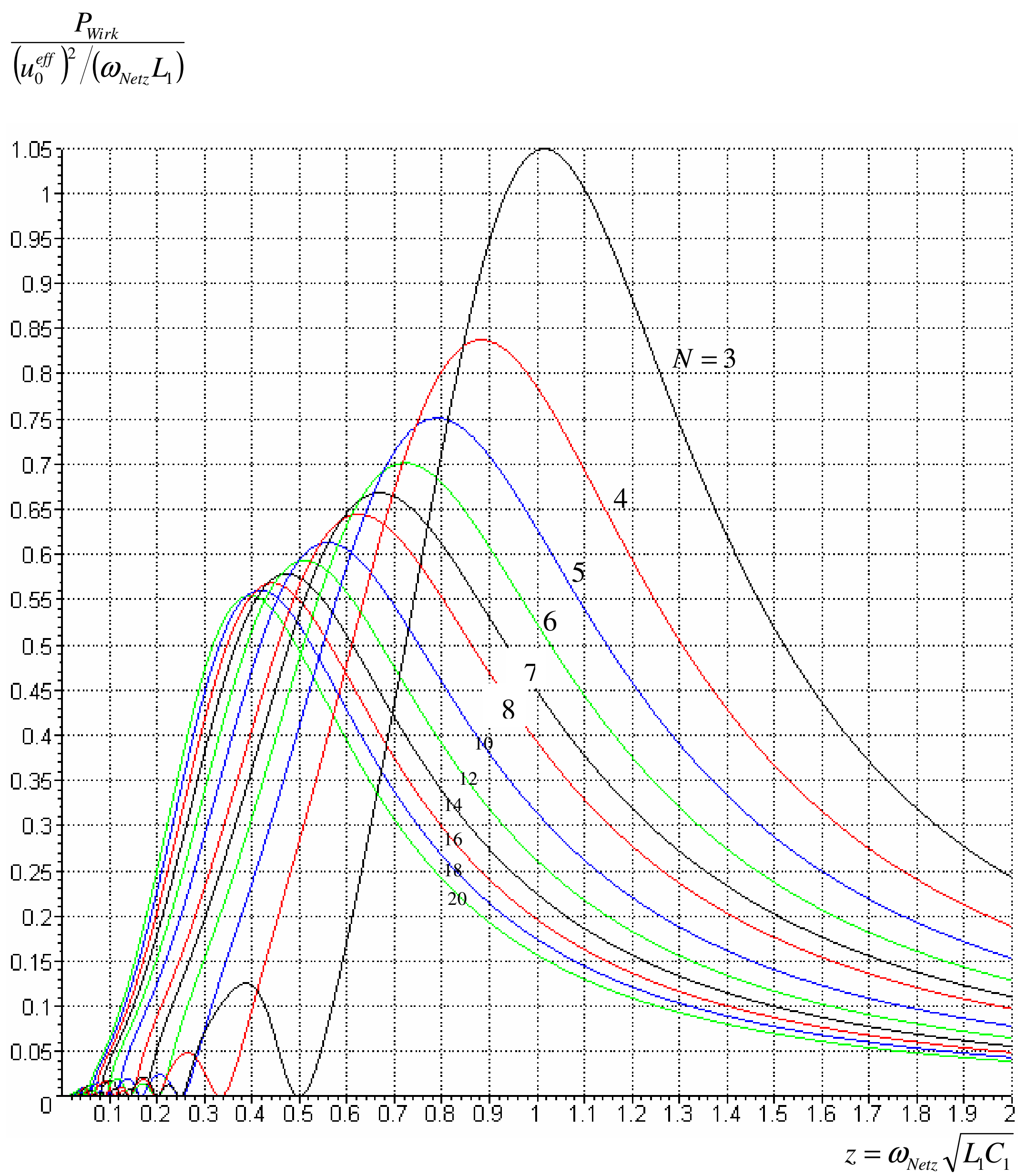
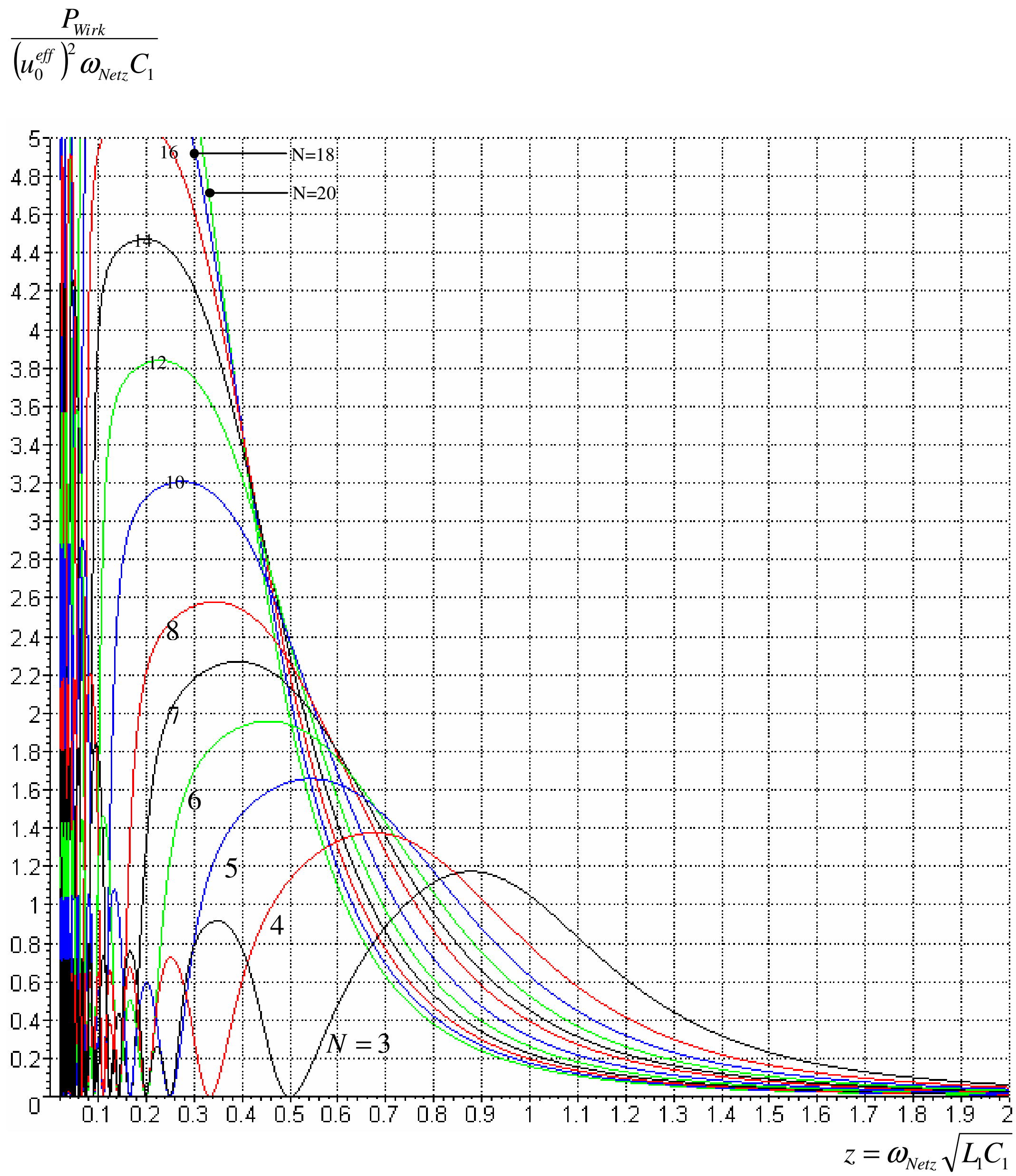
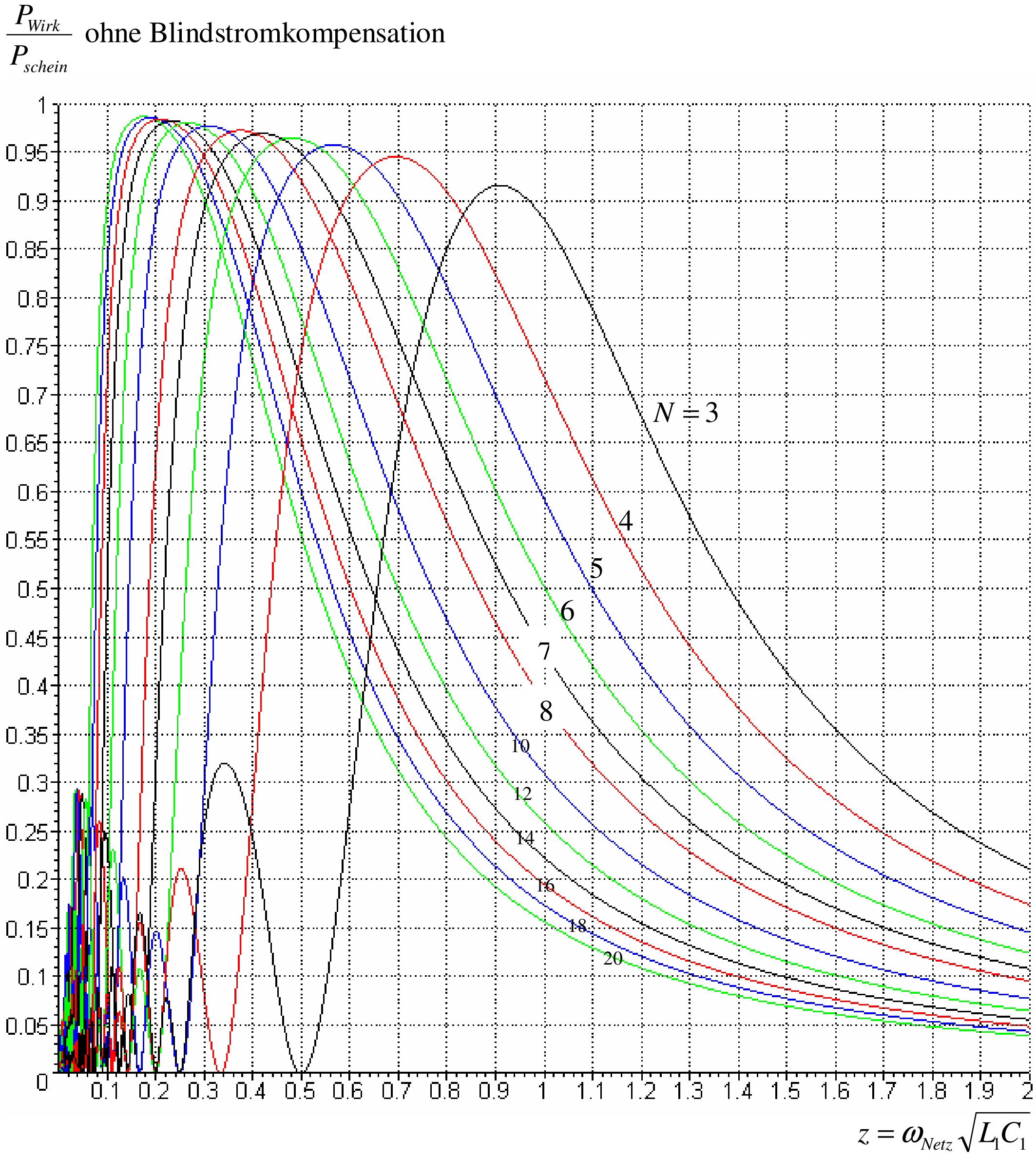
AC-gespeiste SGTC mit rotierender, netzsynchroner Funkenstrecke

Es wird angenommen, dass die Funkenstrecke genau N mal pro Netzperiode zündet, wobei $N \geq 3$ vorausgesetzt wird (für den Fall $N = 2$ liefern die folgenden Formeln keine korrekten Werte; dieser Fall muss gesondert behandelt werden). Der zeitliche Verlauf der Netzspannung sei $u_0 = u_0^{eff} \cos(\omega_{Netz} t + \varphi)$. Ein Zündvorgang der Funkenstrecke sei im Zeitpunkt $t = 0$ und somit um den Phasenwinkel φ später (falls $\varphi > 0$) bzw. früher (falls $\varphi < 0$) gegenüber dem Maximum der Netzspannung. Die übrigen Zündzeitpunkte werden zu $k \cdot 2\pi / (N\omega_{Netz})$ (k ganzzahlig) angenommen.

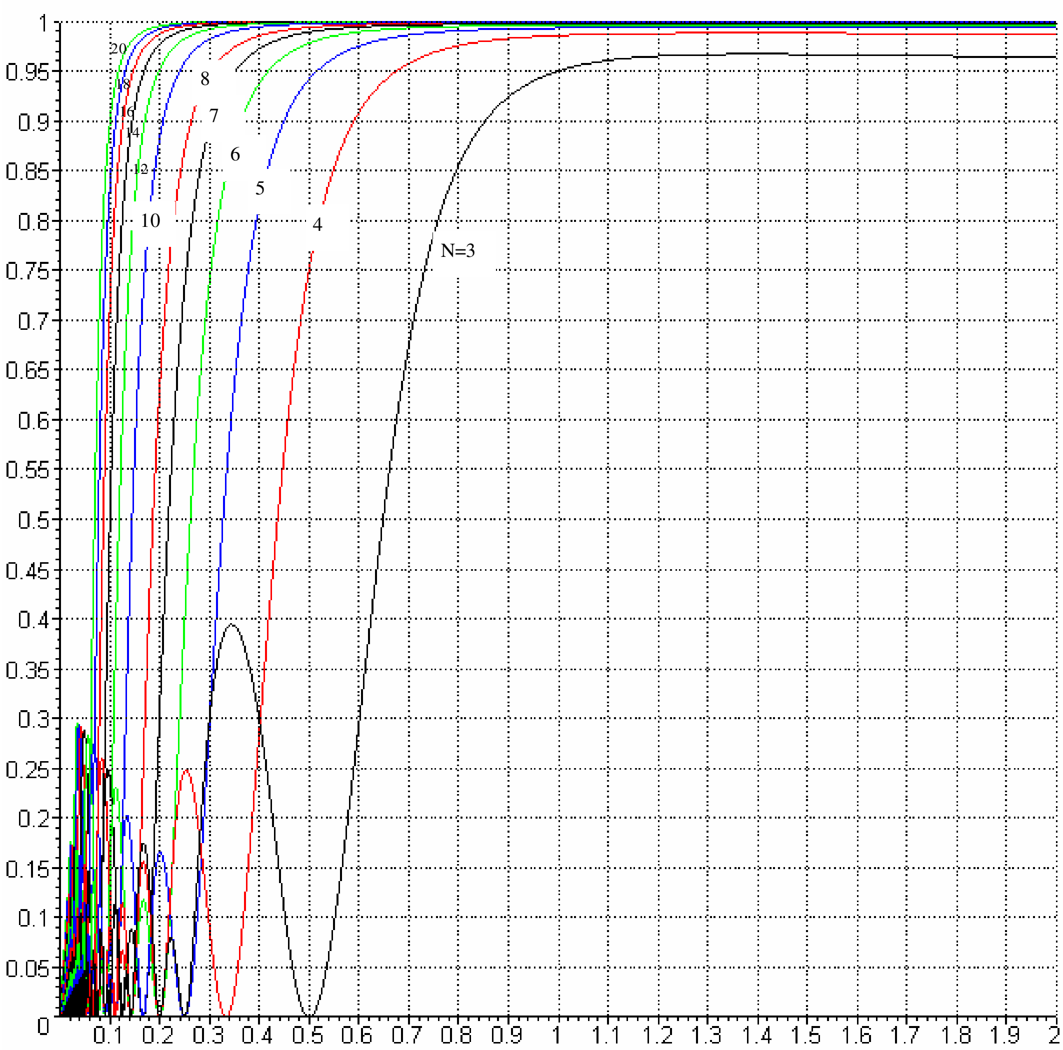




$\frac{P_{Wirk}}{\left(u_0^{eff}\right)^2 \omega_{Netz} C_1}$
N=18
N=20
16
14
12
10
8
7
6
5
4
$N = 3$
$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

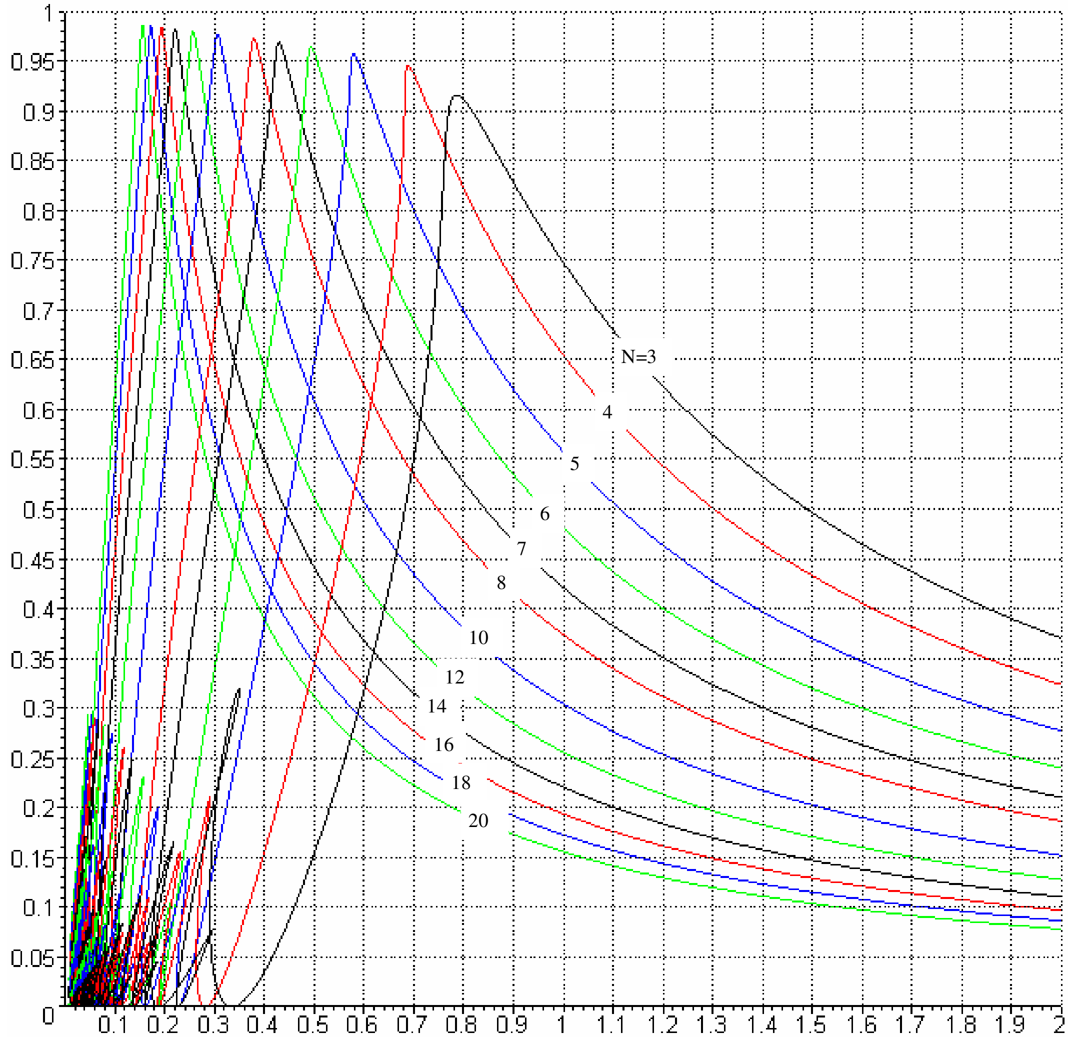

$\frac{P_{Wirk}}{P_{schein}}$ ohne Blindstromkompensation
$N = 3$
4
5
6
7
8
10
12
14
16
18
20
$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{P_{Wirk}}{P_{schein}}$ mit Blindstromkompensation



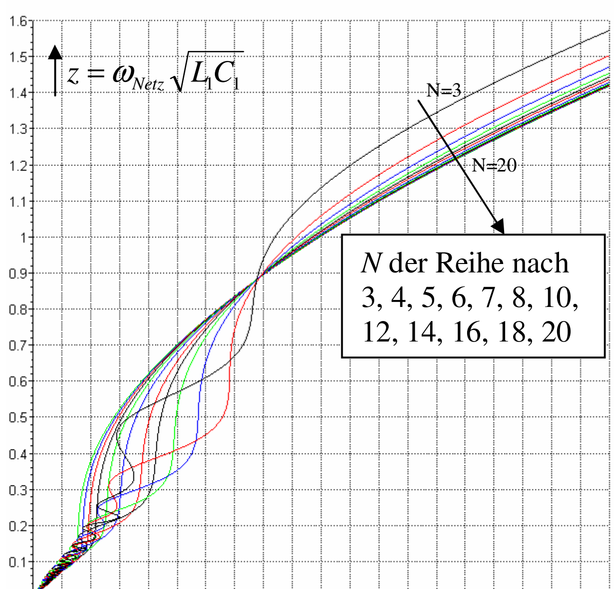
$z = \omega_{Netz} \sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{P_{Wirk}}{P_{schein}}$ ohne Blindstromkompensation



$\left(\left(u_0^{eff}\right)^2 \omega_{Netz} C_1\right) / P_{schein}$

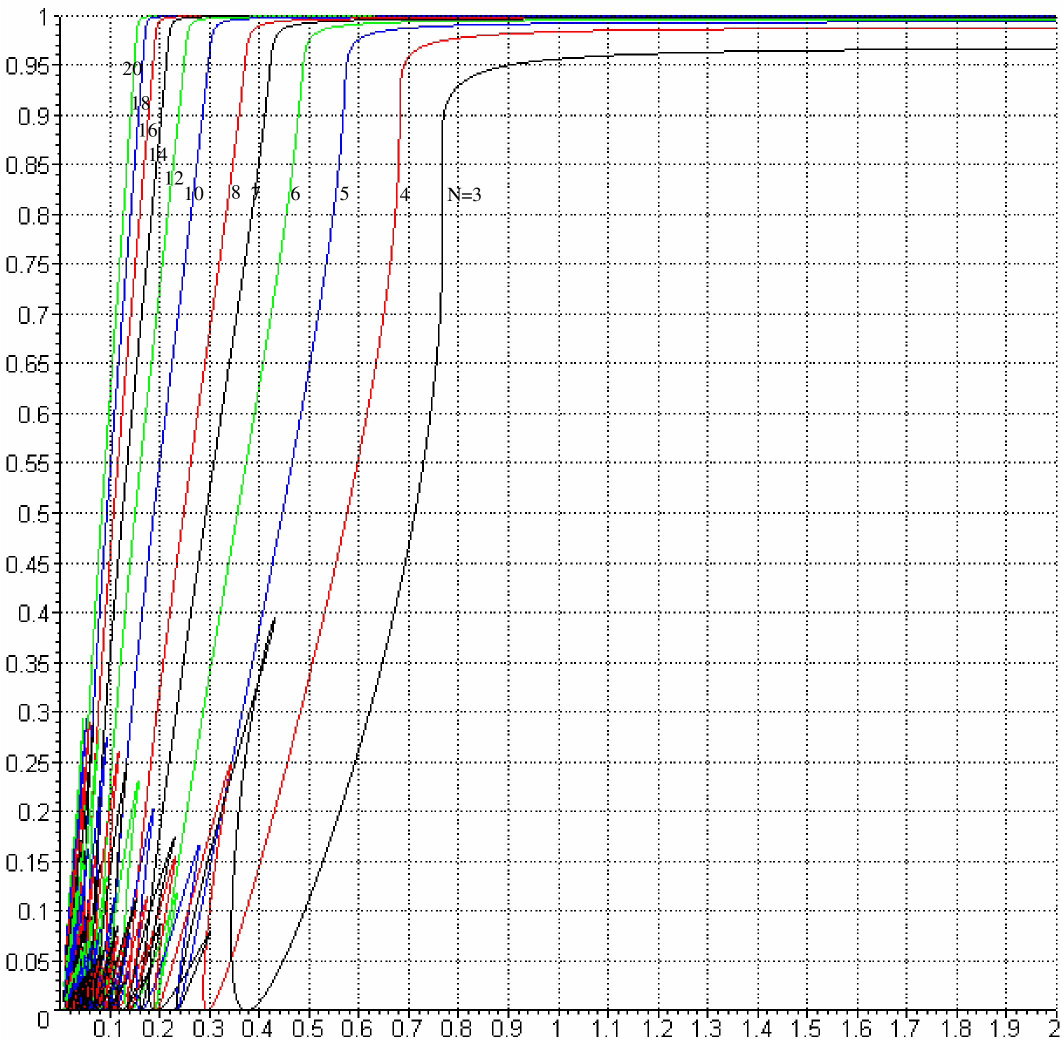
P_{schein} ohne Blindstrom-kompensation



$\left(\left(u_0^{eff}\right)^2 \omega_{Netz} C_1\right) / P_{schein}$

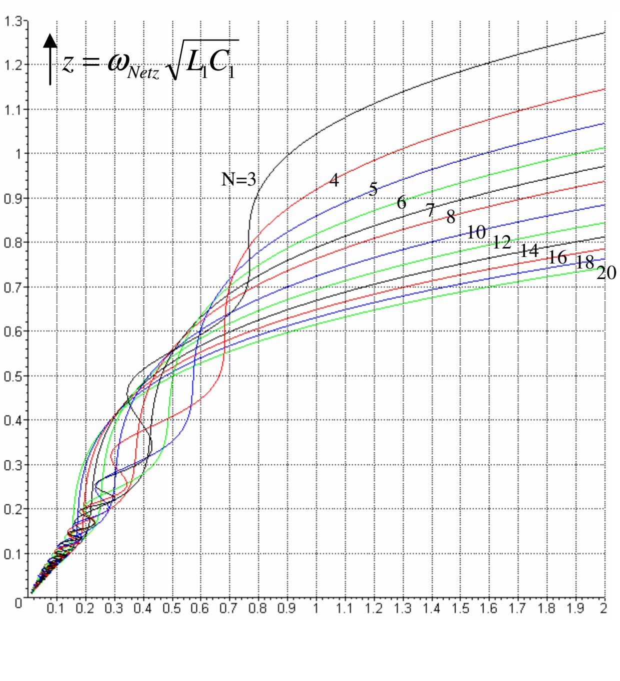
P_{schein} ohne Blindstrom-kompensation

$\frac{P_{Wirk}}{P_{schein}}$ mit Blindstromkompensation



$\left(\left(u_0^{eff}\right)^2 \omega_{Netz} C_1\right) / P_{schein}$

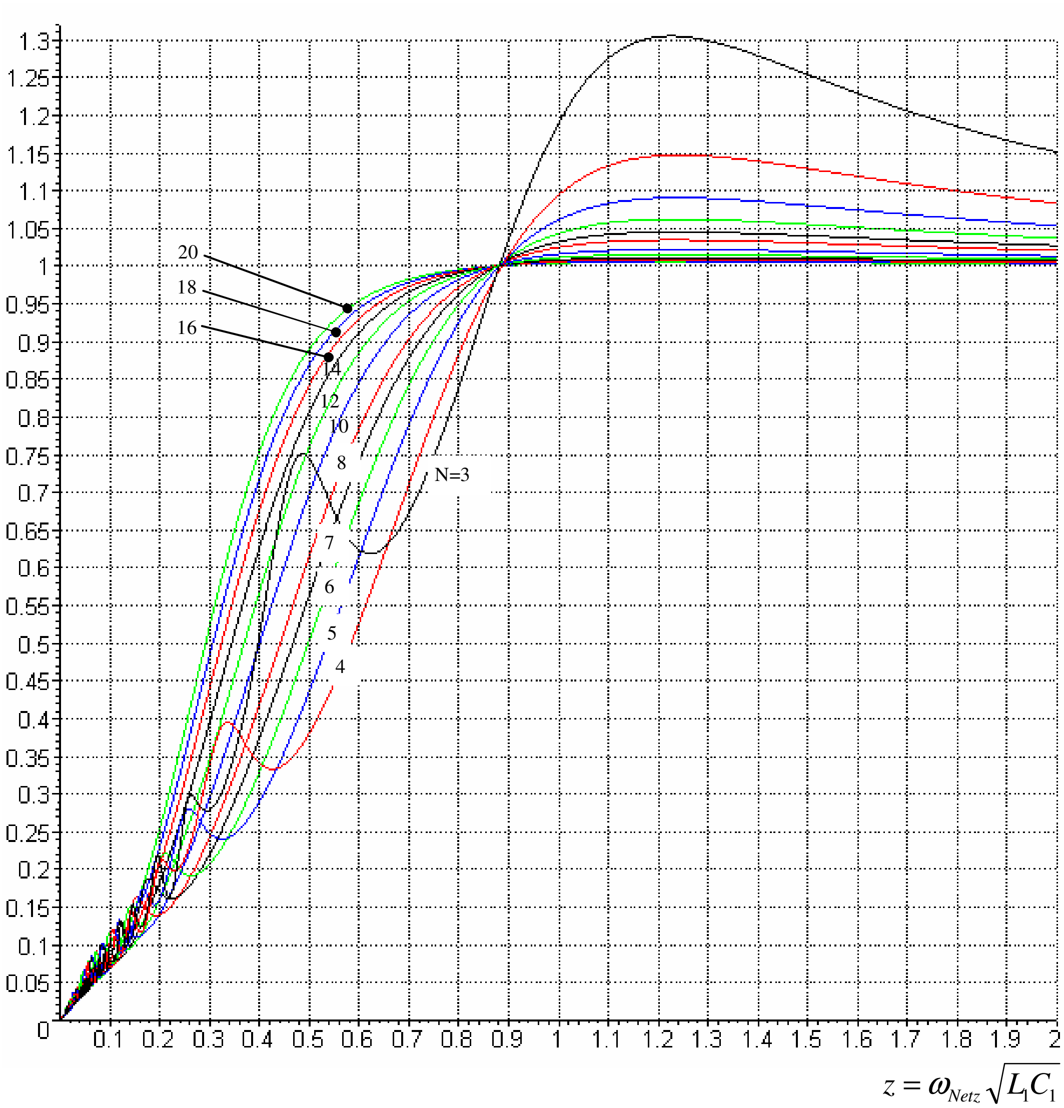
P_{schein} mit Blindstrom-kompensation



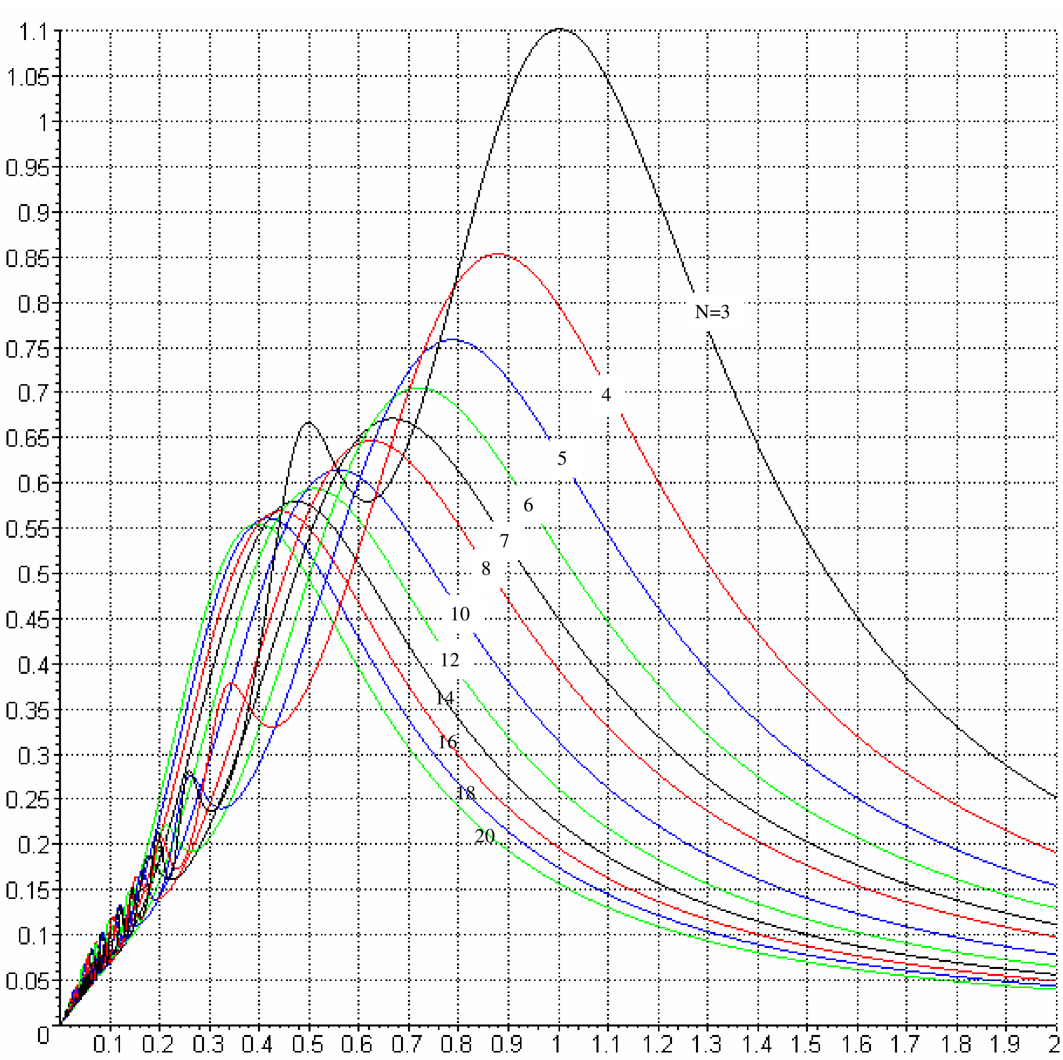
$\left(\left(u_0^{eff}\right)^2 \omega_{Netz} C_1\right) / P_{schein}$

P_{schein} mit Blindstrom-kompensation

$$\frac{i_{L1}^{eff}}{u_0^{eff}/(\omega_{Netz}L_1)} = \frac{i_{trafo}^{eff}}{u_0^{eff}/(\omega_{Netz}L_1)}$$ ohne Blindstromkompensation

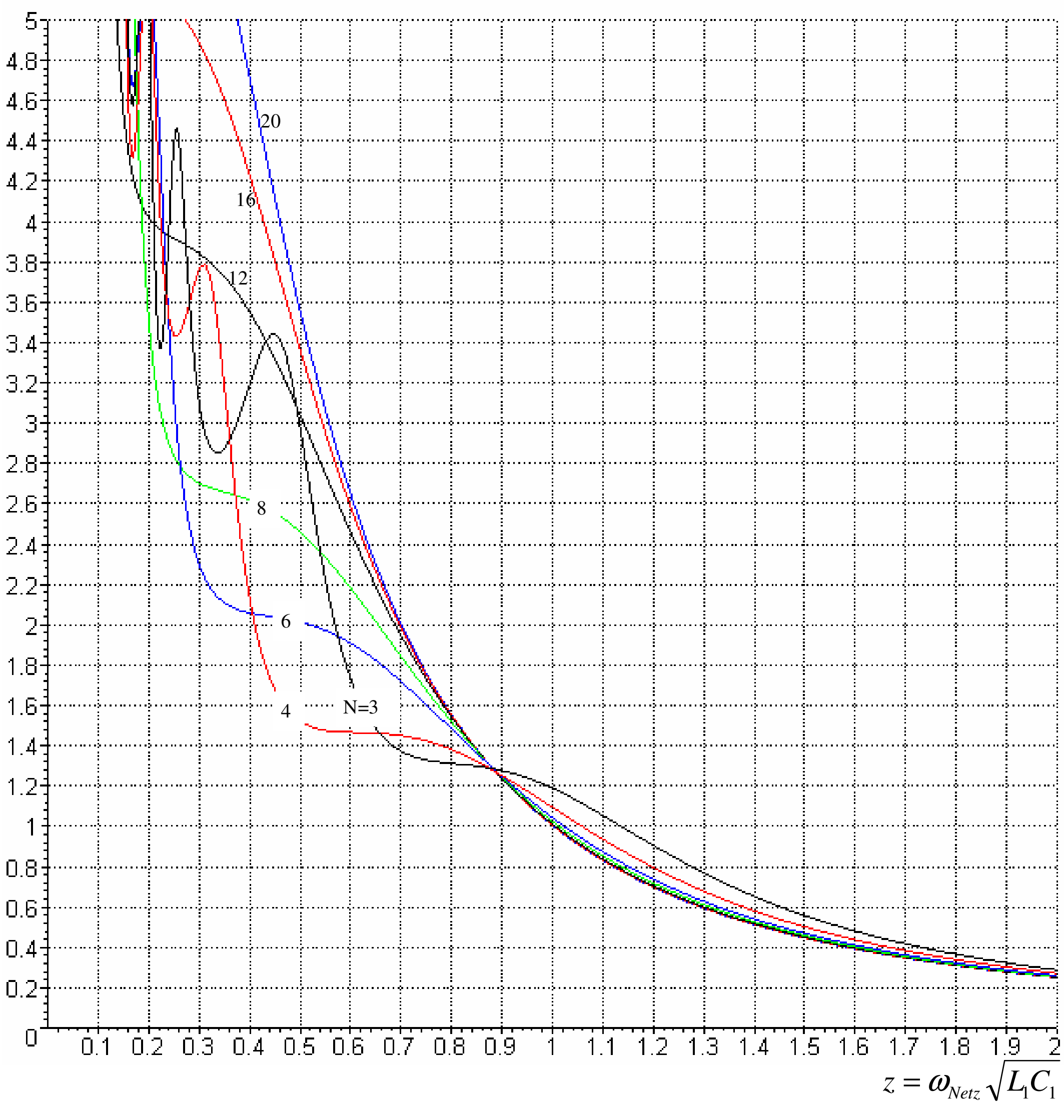


$$\frac{i_{trafo}^{eff}}{u_0^{eff}/(\omega_{Netz}L_1)}$$ mit Blindstromkompensation

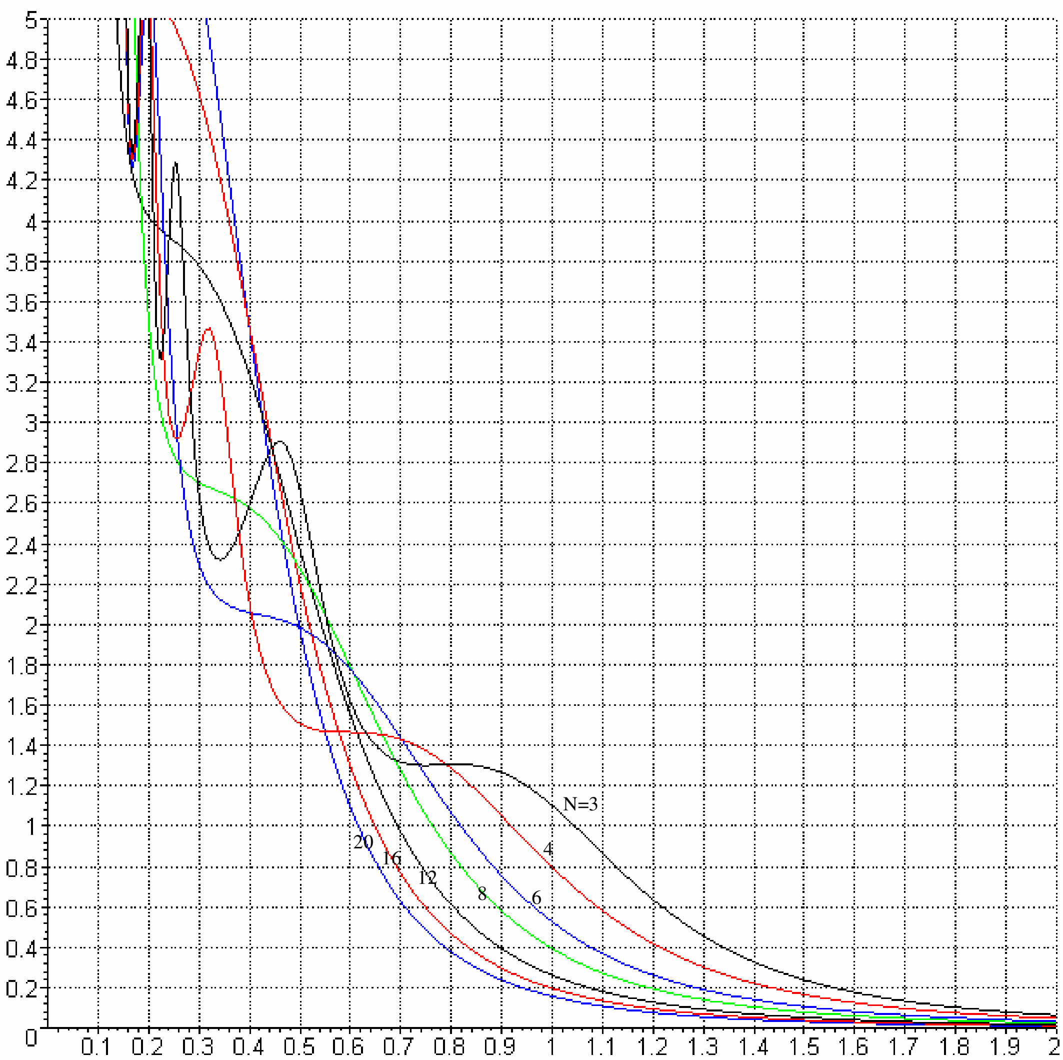


$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$$\frac{i_{L1}^{eff}}{u_0^{eff}\omega_{Netz}C_1} = \frac{i_{trafo}^{eff}}{u_0^{eff}\omega_{Netz}C_1}$$ ohne Blindstromkompensation



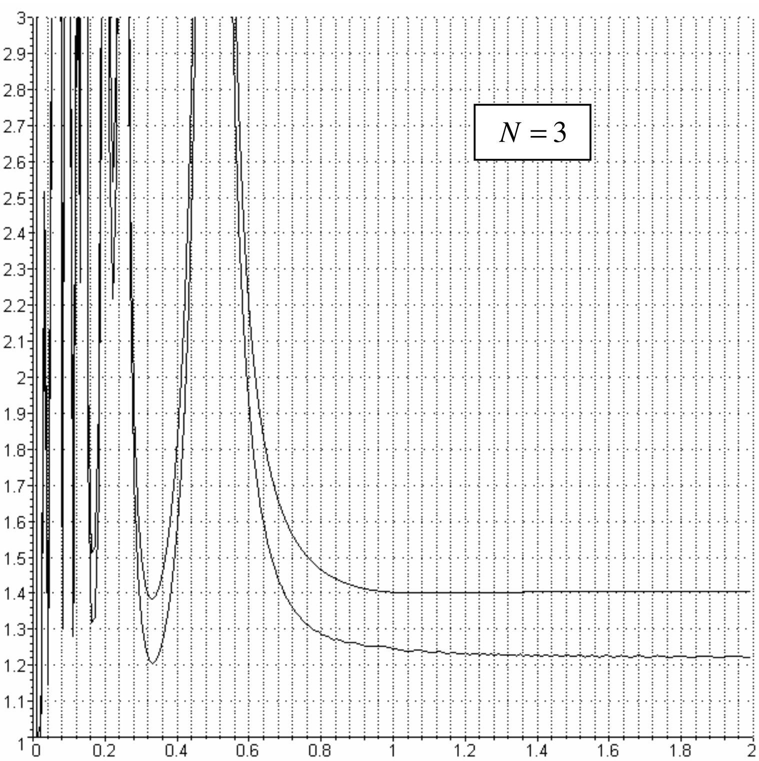
$$\frac{i_{trafo}^{eff}}{u_0^{eff}\,\omega_{Netz} C_1}$$ mit Blindstromkompensation



$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

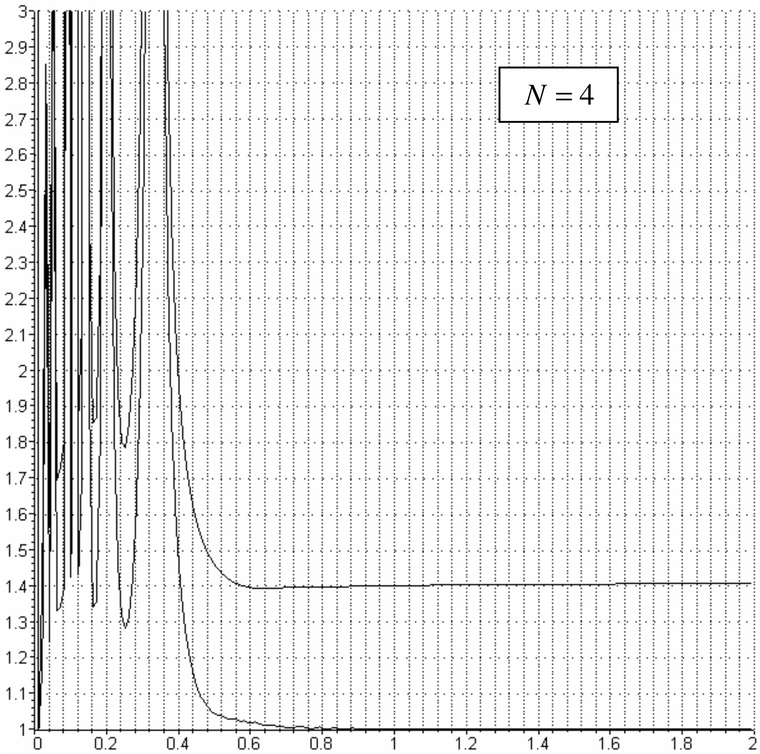
Es wird eine (für $N \neq 4$ fiktive) optimale Zündspannung $u_{C1,zünd,opt}$ des Kondensators definiert. Bei allen N Zündzeitpunkten je Netzperiode sei der Kondensator kurz vor dem Zünden auf diese Spannung aufgeladen (obwohl dies für $N \neq 4$ in der Realität nicht möglich ist). Diese Spannung $u_{C1,zünd,opt}$ sei so groß, dass sich dann die gleiche Wirkleistung ergibt wie die tatsächliche Wirkleistung: $P_{wirk} = \frac{1}{2} C_1 \left(u_{C1,zünd,opt}\right)^2 \cdot \frac{N\omega_{Netz}}{2\pi}$. Nun werden wieder die tatsächlich auftretenden Kondensatorspannungen betrachtet. In den folgenden Diagrammen wird das Verhältnis aus dem maximalen Betrag $u_{C1,\max}$ der Kondensatorspannung, der sich irgendwann (auch zwischen zwei Zündungen) innerhalb einer Netzperiode ergibt, und der optimalen Zündspannung $u_{C1,zünd,opt}$ grafisch dargestellt. Die obere Kurve (mit höheren Werten von $u_{C1,\max}/u_{C1,zünd,opt}$) bezieht sich auf denjenigen Zündwinkel φ, bei dem gerade dieses schlechteste Verhältnis $u_{C1,\max}/u_{C1,zünd,opt}$ erreicht wird. Die untere Kurve bezieht sich auf den unter diesem Aspekt besten Zündwinkel φ.

$\frac{u_{C1,\max}}{u_{C1,zünd,opt}}$ für den schlechtesten und den besten Zündwinkel φ



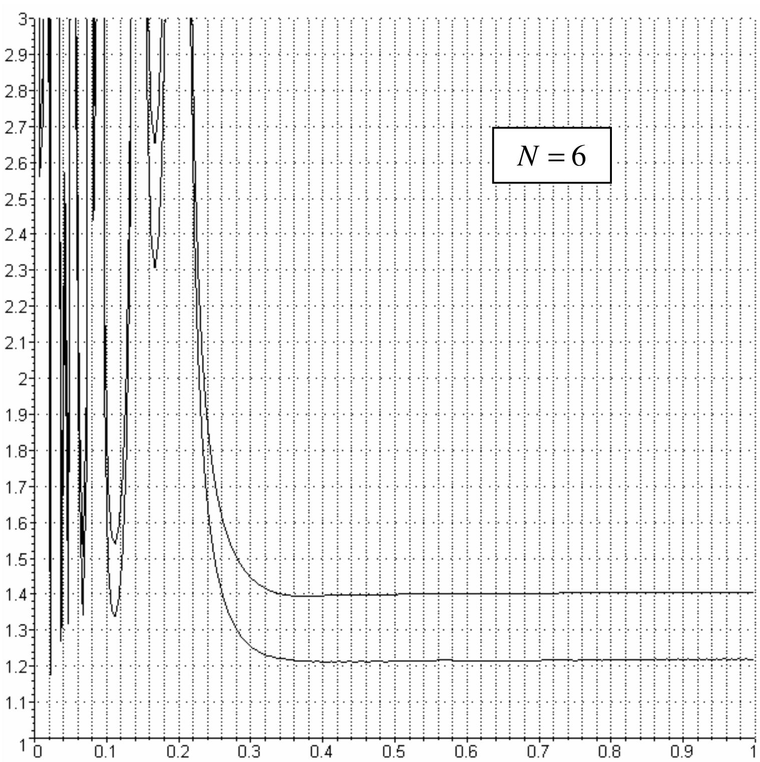
$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{u_{C1,\max}}{u_{C1,zünd,opt}}$ für den schlechtesten und den besten Zündwinkel φ



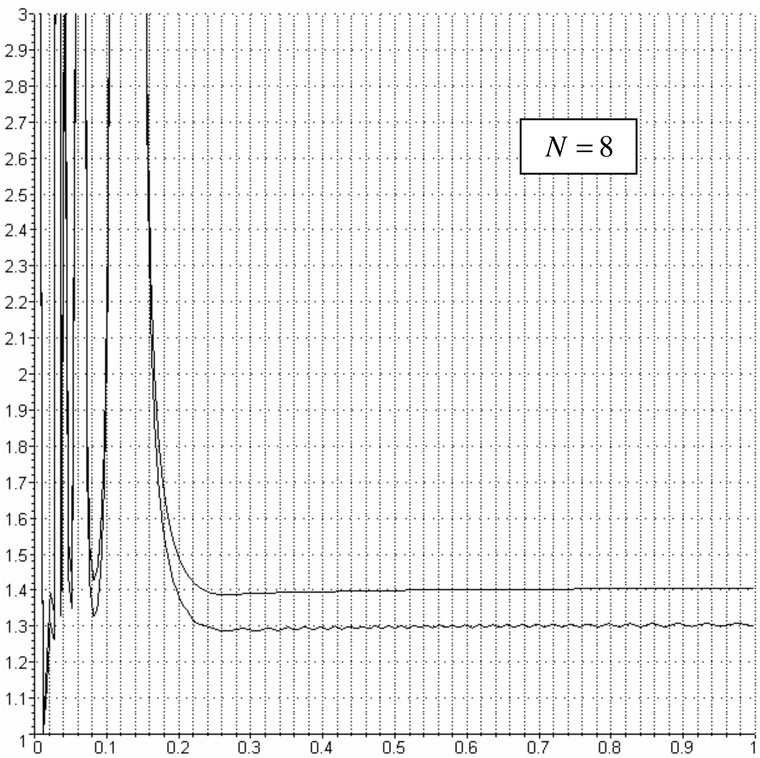
$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{u_{C1,\max}}{u_{C1,zünd,opt}}$ für den schlechtesten und den besten Zündwinkel φ



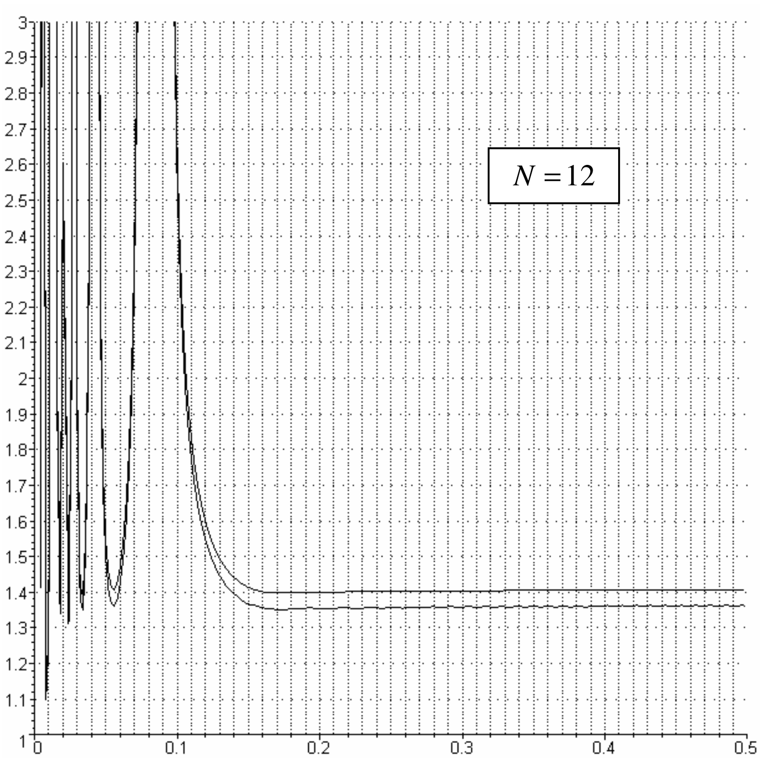
$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{u_{C1,\max}}{u_{C1,zünd,opt}}$ für den schlechtesten und den besten Zündwinkel φ



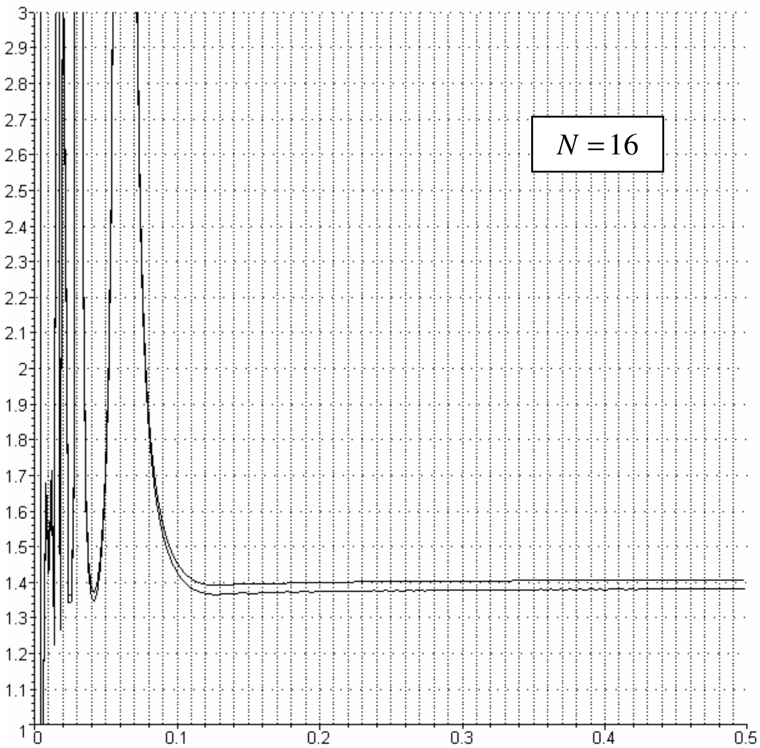
$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{u_{C1,\max}}{u_{C1,zünd,opt}}$ für den schlechtesten und den besten Zündwinkel φ



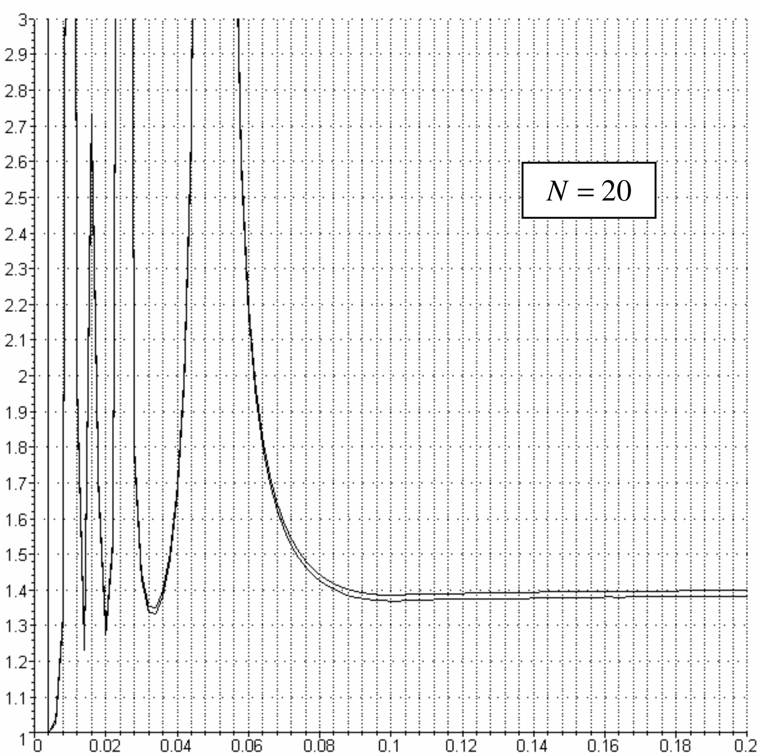
$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{u_{C1,\max}}{u_{C1,zünd,opt}}$ für den schlechtesten und den besten Zündwinkel φ



$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

$\frac{u_{C1,\max}}{u_{C1,zünd,opt}}$ für den schlechtesten und den besten Zündwinkel φ



$z = \omega_{Netz}\sqrt{L_1 C_1}$

Die Wirkleistung P_{wirk} beträgt:

$$P_{wirk} = \begin{cases} \dfrac{N\left(U_0^{eff}\right)^2}{\omega L} \cdot \dfrac{z^2}{\pi\left(z^2-1\right)^2} \cdot \left(1 + \dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{N\,z}\right)^2}{\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{N\,z}\right)^2 - 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{N\,z}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{z}\right) + 1\right)} \right) & \text{falls} \quad z \neq 1 \\[2ex] \dfrac{\pi\,(u_0)^2}{N\omega L} & \text{falls} \quad z = 1 \end{cases}$$

Falls $z \neq 1$ ist, beträgt der Effektivwert des Stroms durch das optimal gewählte Blindstromkompensationsbauteil $\left|i_{komp}^{eff}\right|$ (die nun definierte Variable i_{komp}^{eff} kann in manchen Fällen negativ sein; den Effektivwert des Stroms erhält man durch Betragsbildung):

$i_{komp}^{eff} =$

$$z^2\,\mathit{u0\_eff}\left(2\pi\cos\left(\frac{\pi}{z N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - \pi\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - \pi\cos\left(\frac{\pi}{z N}\right)^4 - N\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z N}\right)^2 - 2z^2\pi\cos\left(\frac{\pi}{z N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + z^2\pi\cos\left(\frac{\pi}{z N}\right)^4 + N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^3\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) + z^2\pi\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right) \Big/ \left(\pi\,\mathit{omega\_netz}\,L\,(z-1)^2(z+1)^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{z N}\right)^4 + \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{z N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right)\right)$$

Falls $z = 1$ ist, gilt:

$i_{komp}^{eff} =$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\mathit{u0\_eff}\left(2\pi\cos\left(\dfrac{2\pi}{N}\right) + 3N\sin\left(\dfrac{2\pi}{N}\right)\right)}{N\,L\,\mathit{omega\_netz}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{N}\right)}$$

Falls $i_{komp}^{eff} > 0$ gilt, muss zur Blindstromkompensation eine Induktivität L_{Komp} mit dem optimalen Wert $L_{Komp} = u_0^{eff}\Big/\left(\omega_{Netz} i_{komp}^{eff}\right)$ benutzt werden. Falls $i_{komp}^{eff} < 0$ gilt, muss zur Blindstromkompensation ein Kondensator C_{Komp} mit dem optimalen Wert $C_{Komp} = \left|i_{komp}^{eff}\right|\Big/\left(u_0^{eff}\,\omega_{Netz}\right)$ benutzt werden.

Falls $z \neq 1$ ist, beträgt der Strom i_{L1} durch die Induktivität L_1:

$i_{L1} =$

$$\mathit{u0\_eff}\,z\left(-\left(-2z^2N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + 2z^2N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)z^4\pi + \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\pi - \cos\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)z^3N + \cos\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)zN - \cos\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)zN + \cos\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{zN}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)z^3N - \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\pi + 2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)z^4\pi - \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)z^2\pi - \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)^2z^4\pi + \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)^2z^2\pi + 2z^2N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 - 2z^2N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right) \Big/ \left(\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\pi\,(z+1)\,(z-1)^3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{zN}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + 1\right)\right)\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} / (L\,\mathit{omega\_netz}\,(z+1))$$

Im Fall $z = 1$ gilt:

$i_{L1} =$

$$\frac{1}{24}\,\frac{u0\_eff\,\sqrt{6}\,\sqrt{\dfrac{-44\,\pi^2 - 24\,\pi\,N\sin\left(\dfrac{4\,\pi}{N}\right) - 9\,N^2 + 9\,N^2\cos\left(\dfrac{4\,\pi}{N}\right) + 20\,\pi^2\cos\left(\dfrac{4\,\pi}{N}\right)}{-1 + \cos\left(\dfrac{2\,\pi}{N}\right)}}}{N\,L\,omega\_netz\,\cos\left(\dfrac{\pi}{N}\right)}$$

Die Spannungen $U_{C1}^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$, auf die der Kondensator jeweils kurz vor dem Zünden der Funkenstrecke aufgeladen ist, betragen im Fall $z \neq 1$:

$U_{C1}^{(k)} =$

$$\begin{aligned}
&-2\sqrt{2}\,u0_eff\left(\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)\Bigg(2\sin(\phi)\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 - 4\sin(\phi)\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \\
&\quad + 2\sin(\phi)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 - 2\cos(\phi)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - 4\cos(\phi)\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 - 2\cos(\phi)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 + \cos(\phi)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 \\
&\quad - 4\sin(\phi)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 + 4\cos(\phi)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + 2\cos(\phi)\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - \sin(\phi)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \\
&\quad + 2\sin(\phi)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + 2\sin(\phi)\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - 2\cos(\phi)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + \cos(\phi)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2\Bigg) \Bigg/ \Bigg((z-1)\,(z+1) \\
&\quad \left(\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^4 + \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

Im Fall $z = 1$ gilt:

$U_{C1}^{(k)} =$

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\Bigg(\Bigg(\left(8\,\pi\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2 - 4\,\pi\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - 8\,\pi\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + 4\,\pi\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\Bigg)\cos(\phi) \\
&\quad + \Bigg(-8\,\pi\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + \left(-8\,\pi\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2 + 4\,\pi\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - 2\,\pi\sqrt{2} + 4\,\pi\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\,\pi}{N}\right)^2\Bigg)\sin(\phi)\Bigg)u0_eff / N
\end{aligned}$$

Der zeitliche Verlauf des Stroms $i_{L1,stat}$ durch die Induktivität im stationären Zustand, d.h. nach Abklingen von Einschwingvorgängen, wird nun angegeben. Um den Strom zu einem beliebigen Zeitpunkt t zu berechnen, müssen zunächst eine ganze Zahl k und eine reelle Zahl τ mit $0 \leq \tau \leq \dfrac{2\pi}{N\omega_{Netz}}$ derart ermittelt werden, dass $t = k \cdot \dfrac{2\pi}{N\omega_{Netz}} + \tau$ gilt. Dann kann $i_{L1,stat}(t) = i_{L1,stat}\left(k \cdot \dfrac{2\pi}{N\omega_{Netz}} + \tau\right)$ ermittelt werden:

Im Fall $z \neq 1$ gilt:

$i_{L1,stat}\left(k \cdot \dfrac{2\pi}{N\omega_{Netz}} + \tau\right) =$

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\Bigg(\frac{z\left(-\sin\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^3 + \sin\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right)\cos\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N}\right)}{L\,w\,(z-1)\,(z+1)\left(\left(2\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 - 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^4\right)} + \frac{z\left(-\sin\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^3 + \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)\right)\sin\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N}\right)}{L\,w\,(z-1)\,(z+1)\left(\left(2\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 - 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^4\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}\Bigg)\cos\left(\frac{w\,\tau}{z}\right) \\
&\quad + \frac{z\left(\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 + 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^4\right)\left(\sin\left(\frac{w\,\tau}{z}\right)\cos\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N}\right) - z\sin\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N} + w\,\tau\right)\right)}{L\,w\,(z-1)\,(z+1)\left(\left(2\cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^2 - 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{z\,N}\right)^4\right)}\Bigg)u0_eff\,\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Im Fall $z = 1$ gilt:

$$i_{L1,stat}\left(k \cdot \frac{2\pi}{N\omega_{Netz}} + \tau\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{(omega\_netz\,\tau\,N + 2\,\pi)\,\sqrt{2}\,u0\_eff\cos\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N}\right)}{omega\_netz\,L\,N} + \left(\frac{\pi\,\sqrt{2}\,u0\_eff\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)omega\_netz\,L\,N} + \frac{\sqrt{2}\,u0\_eff}{2\,omega\_netz\,L} - \frac{1}{2}\frac{\pi\,\sqrt{2}\,u0\_eff}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)omega\_netz\,L\,N\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)}\right)\sin\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N}\right)\right)\cos(omega\_netz\,\tau)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,u0\_eff\cos\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N}\right)}{omega\_netz\,L} - \frac{1}{2}\frac{\tau\,\sqrt{2}\,u0\_eff\sin\left(\phi + \frac{2\,k\,\pi}{N}\right)}{L}\right)\sin(omega\_netz\,\tau)$$