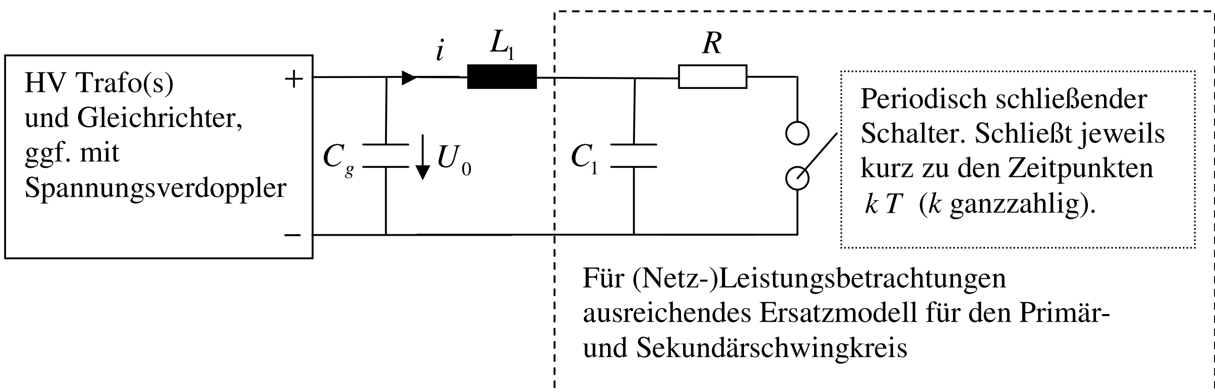
Induktive oder resistive Strombegrenzung für DC-gespeiste SGTC mit rotierender Funkenstrecke beliebiger Drehzahl

Es wird von einer SGTC ausgegangen, welche mit einer rotierenden primären Funkenstrecke ausgestattet ist, die eine vorgegebene Drehzahl und Anzahl von Kontaktstellen auf der rotierenden Scheibe hat. Es wird von der Annahme ausgegangen, dass die Funkenstrecke immer im zeitlichen Abstand T zündet, d.h. es finden $1/T$ Zündvorgänge pro Sekunde statt. Ob diese Annahme zulässig ist, kann man anhand der unten berechneten Spannung des Primärkondensators kurz vor dem Zünden der Funkenstrecke überprüfen.

Zunächst wird der Fall betrachtet, dass der Primärschwingkreis über eine Induktivität L_1 an die DC-Stromversorgung angekoppelt ist.

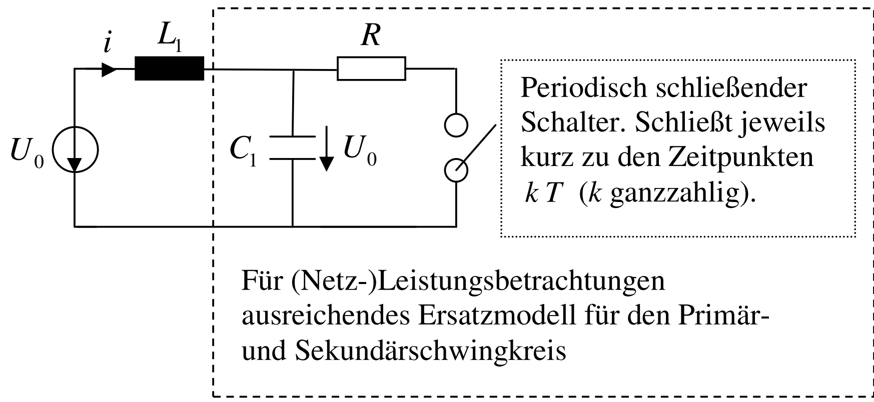
Induktive Strombegrenzung

Wenn man sich nur für die niederfrequenten Ströme und Spannungen sowie die Wirk- und Scheinleistung der SGTC interessiert, kann man so tun, als ob der Kondensator des Primärschwingkreises nach dem Zünden der Funkenstrecke über einen niederohmigen Widerstand entladen würde. Die Sekundärspule entfällt. Es wird folgendes vereinfachtes Schaltbild angenommen:



Der Kondensator C_g dient der Glättung der vom HV Trafo mit nachgeschalteter Gleichrichterschaltung gelieferten Spannung.
Der Schalter soll einerseits immer nur sehr kurz im Verhältnis zur Zeit T und zur Periodendauer $2\pi\sqrt{L_1 C_1}$ des Schwingkreises aus L_1 und C_1 schließen, und andererseits soll der Lastwiderstand R so niederohmig sein, dass der Kondensator C_1 zu den Zeitpunkten, an denen der Schalter jeweils wieder öffnet, nahezu vollständig entladen ist. Die Schließ-Zeitpunkte des Schalters sind $k\,T$ (k ganzzahlig).

Um leichter rechnen zu können, wird angenommen, dass der Glättungskondensator C_g so hoch-kapazitiv sei, dass die Spannung U_0 nahezu konstant ist (geringe Restwelligkeit). In der Praxis ist es auch günstig, C_g ausreichend hoch zu wählen, um HF Schwingungen zusammen mit L_1 auszufiltern und nicht auf die HV Trafos und das Netz rückwirken zu lassen. Im Grenzfall $C_g \to \infty$ kann man sich den Kondensator durch eine ideale Spannungsquelle ersetzt denken, deren zunächst unbekannte Spannung U_0 später so berechnet werden muss, dass der zuführenden Strom vom Netzteil im zeitlichen Mittel gleich ist wie der abgehende Strom i.



In dieser vereinfachten Schaltung kann man die Ströme und Spannungen berechnen. Dabei wird angenommen, dass Einschwingvorgänge abgeklungen sind, d.h. eine gewisse Zeit nach dem Einschalten vergangen ist.

Es wird die Abkürzung

$$\alpha = \frac{T}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

definiert. Damit ergibt sich der zeitliche Verlauf des Stroms i zu:

$$i_{stat}(t) = \left\{ \begin{array}{lll} U_0 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{L_1 C_1}} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = U_0 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \left(\frac{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{L_1 C_1}}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L_1 C_1}}\right) \right) & \textit{falls} & 0 \le t \le T \\ i_{stat}(t - k\,T) & \textit{falls} & \begin{array}{l} t \text{ beliebig} \\ \text{und } k \text{ ganzzahlig} \end{array} \end{array} \right\}$$

Dabei wird der Strom mit i_{stat} bezeichnet, um deutlich zu machen, dass es sich um den Strom im stationären Fall, d.h. nach Abklingen von Einschwingvorgängen handelt. Für beliebige t ergibt sich $i_{stat}(t)$ durch T-periodische Fortsetzung dieses Stroms: $i_{stat}(t + n\,T) = i_{stat}(t)$ (n ganzzahlig). Diese Darstellung für $i_{stat}(t)$ und auch die folgenden Berechnungen, insbesondere die Leistungsberechnung, gelten nur im Fall $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0$. Denn – wie später gezeigt wird – wird im Falle $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ der stationäre Fall nach dem Einschalten niemals erreicht.

Der zeitliche Mittelwert $\bar{i}$ des Stroms *i* beträgt

$$\bar{i} = \frac{2C_1U_0}{T}$$

und ist somit unabhängig von der Induktivität L_1. Da $\bar{i}$ proportional zu U_0 ist, stellt sich die Teslaspule aus Sicht der HV-Versorgungseinheit lediglich als Parallelschaltung eines hochkapazitiven Kondensators und eines Widerstands mit dem Wert $R_{TC} = \frac{U_0}{\bar{i}} = \frac{T}{2C_1}$ dar. Dieser Widerstand ist π mal so groß wie die Wechselstrom-Reaktanz $\frac{T}{2\pi C_1}$ des Kondensators C_1 bei der Schließfrequenz $1/T$ des Schalters.

Der Effektivwert i_{eff} des Stroms *i* ist z.B. für die Dimensionierung des Glättungskondensators von Bedeutung und beträgt:

$$i_{eff} = U_0 \sqrt{\frac{C_1\left(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)}{L_1\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}} \qquad \text{(nur falls } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0\text{)}$$

Die zeitlich gemittelte Leistung P_R, die am Widerstand *R* (und bei einer realen Teslaspule v. a. in Form von Streamern) verbraucht wird, ergibt sich zu

$$P_R = U_0\bar{i} = \frac{2C_1(U_0)^2}{T} \qquad \text{(nur falls } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0\text{)}$$

Der zeitliche Verlauf $U_{C1}(t)$ der Spannung am Kondensator C_1 beträgt:

$$\text{Für } 0 \le t \le T \text{ gilt: } U_{C1}(t) = U_0 \cdot \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{L_1C_1}} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \qquad \text{(nur falls } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0\text{)}$$

Für beliebige *t* ergibt sich $U_{C1}(t)$ durch *T*-periodische Fortsetzung dieser Spannung: $U_{C1}(t+nT) = U_{C1}(t)$ (*n* ganzzahlig).

Die Spannung von C_1 unmittelbar vor dem Schließen des Schalters beträgt in diesem idealisierten Modell genau $2U_0$. Die maximale positive Spannung $U_{C1}^{\max}$, auf die C_1 innerhalb einer Periode aufgeladen ist, beträgt:

$$U_{C1}^{\max} = \begin{cases} 2U_0 & \text{falls} \quad \alpha \le \pi \\ U_0\left(1+\dfrac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|}\right) & \text{falls} \quad \alpha \ge \pi \end{cases}$$

Dieser Wert ist für die Dimensionierung der Spannungsfestigkeit von C_1 wichtig. Der Betrag der maximalen negativen Spannung von C_1 ist nicht größer als die maximale positive Spannung.

Die maximale Kondensatorspannung $U_{C1}^{\max}$ kann größer als die Spannung $2U_0$ sein, auf die der Kondensator C_1 kurz vor dem Zünden der Funkenstrecke aufgeladen ist. Wenn man solche „Überschwinger" vermeiden will, muss entweder $\alpha \le \pi$ oder aber $\alpha = k\pi$, $k = 1,3,5,\cdots$ sein. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Resonanzfrequenz $1/\left(2\pi\sqrt{L_1C_1}\right)$ des Schwingkreises aus L_1 und C_1 entweder maximal halb so groß oder aber genau $k/2$ $(k = 1,3,5,\cdots)$ mal so groß wie die Schließfrequenz $1/T$ des Schalters bzw. der Funkenstrecke sein muss. Aus Kostengründen für den Bau von L_1 könnte man k eher größer wählen. Dann wird allerdings auch der Effektivwert i_{eff} von i größer. Verluste durch den ohmschen Widerstand z.B. des Kupferlackdrahts der Induktivität L_1 sind proportional zu i_{eff}^2.

Einschwingvorgang bei induktiver Ankopplung

Nun wird der Einschwingvorgang für den Strom i angegeben. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass zur Zeit $t = 0$ und somit genau in dem Moment eingeschaltet wird, wenn der Schalter gerade schließt. Außerdem soll der Glättungskondensator C_g sofort nach dem Einschalten seine Spannung erreicht haben, die dann konstant ist (dies ist allerdings in der Realität nicht der Fall und wird hier nur angenommen, um leichter rechnen zu können).

Um $i(t)$ für eine beliebige Zeit t zu berechnen, muss man zunächst eine ganze Zahl k und eine reelle Zahl τ mit $0 \le \tau \le T$ derart bestimmen, dass $t = k\,T + \tau$ gilt. Damit kann dann $i(t) = i(k\,T + \tau)$ berechnet werden:

$$i(k\,T+\tau) = \begin{cases} U_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}\left(\sin\left(\dfrac{\tau}{\sqrt{L_1\,\mathrm{C}_1}}\right) + \cos\left(\dfrac{\tau}{\sqrt{L_1\,\mathrm{C}_1}}\right)\dfrac{1-(\cos\alpha)^k}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}\right) & \tan\dfrac{\alpha}{2} \ne 0 \text{ und } 0 \le \tau \le T,\, k \in Z \\ U_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sin\left(\dfrac{\tau}{\sqrt{L_1\,\mathrm{C}_1}}\right) & \text{falls} \quad \tan\dfrac{\alpha}{2} = 0 \text{ und } 0 \le \tau \le T,\, k \in Z \end{cases}$$

Im Fall $\tan\frac{\alpha}{2} \neq 0$ ist folgende alternative Darstellung möglich, aus der man erkennen kann, wie sich $i(t)$ dem Strom $i_{stat}(t)$ (stationärer Fall) annähert:

$$i(k\,T+\tau) = \left\{ i_{stat}(\tau) - U_0\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{(\cos\alpha)^k}{\tan\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{L_1\,C_1}}\right) \quad \text{falls} \quad \tan\frac{\alpha}{2} \neq 0 \right\}$$

Falls $|\cos\alpha| < 1$ ist, wird die Differenz $i(t) - i_{stat}(t)$ im Laufe der Zeit kleiner, denn sie enthält den Faktor $(\cos\alpha)^k$, welcher für zunehmende Zeiten t und somit für zunehmende k einen immer kleineren Betrag hat. Falls $|\cos\alpha| = 1$ gilt, wird $(\cos\alpha)^k$ für zunehmende k zwar nicht kleiner, aber dann ist $\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right| \to \infty$, und da $\tan\frac{\alpha}{2}$ im Nenner steht, verschwindet $i(t) - i_{stat}(t)$, d.h. nach dem Einschalten wird sofort der stationäre Strom erreicht: $i(t) = i_{stat}(t)$. Diese Bedingung $|\cos\alpha| = 1$ ist wegen der Voraussetzung $\tan\frac{\alpha}{2} \neq 0$ gleichbedeutend mit $\cos\alpha = -1$ und $\alpha = k \cdot \pi$, $k = 1,3,5,\cdots$. Wie oben erläutert wurde, ist in diesem Fall die maximale, innerhalb einer Periode auftretende Kondensatorspannung betragsmäßig nicht größer als die Spannung, auf die der Kondensator kurz vor dem Schließen des Schalters bzw. vor dem Zünden der Funkenstrecke aufgeladen ist. Allerdings wird für große Zahlenwerte von α der Kondensator innerhalb einer Periode mehrfach auf- und entladen.

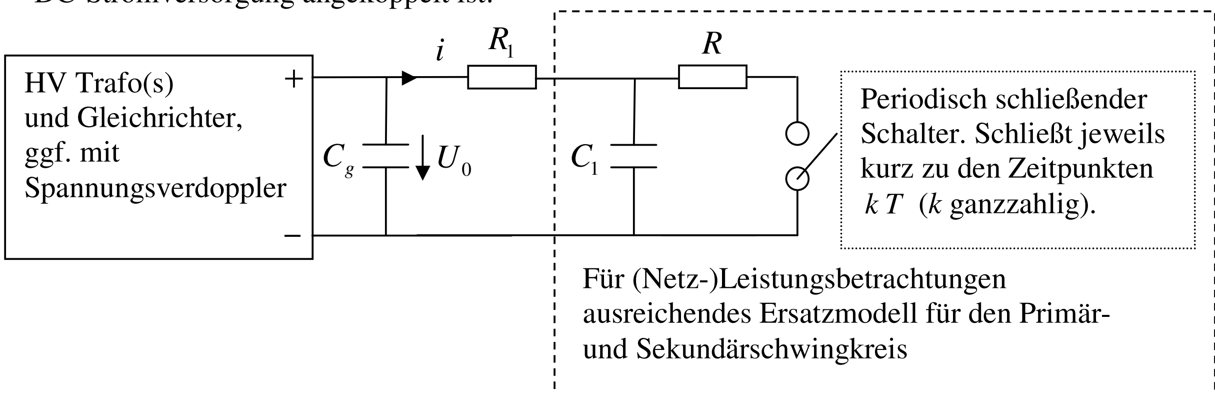
Die Bedingung $\tan\frac{\alpha}{2} = 0$ ist gleichbedeutend mit $\alpha = k \cdot 2\pi$, $k = 1,2,3,\cdots$. In diesem Fall wird der stationäre Strom $i_{stat}(t)$ nach dem Einschalten niemals erreicht. Außerdem ist dann die Wirkleistung P_R, die am Widerstand R verbraucht wird, gleich Null, denn zu den Zeitpunkten, an denen der Schalter schließt, ist jeweils die Kondensatorspannung Null. Wenn $\tan\frac{\alpha}{2}$ nur geringfügig von Null abweicht, wird in diesem idealisierten Modell nach einer gewissen Zeit der stationäre Strom zunehmend genauer erreicht (umso langsamer, je näher $\tan\frac{\alpha}{2}$ an Null ist). In der Realität wird allerdings, wenn $\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|$ zu klein ist, niemals der stationäre Strom erreicht, und die Wirkleistung ist sehr klein. Denn ein Zünden der Funkenstrecke ist notwendig, damit sich Strom und Spannung „aufschaukeln" können und der stationäre Zustand erreicht werden kann. Wenn aber die Kondensatorspannung zum Zeitpunkt zu niedrig ist, an dem die rotierende Scheibe so steht, dass ein Funkenüberschlag prinzipiell möglich wäre, findet in der Realität kein Funkenüberschlag statt.

In der Praxis muss aber der Fall, dass $\tan\frac{\alpha}{2} \neq 0$, aber $\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|$ klein ist, auch aus einem anderen Grund unbedingt vermieden werden: Wenn der eingeschwungene Zustand erreicht ist, ist der Betrag der maximalen Kondensatorspannung, die innerhalb einer Periode auftritt, sehr viel größer als die Spannung $2U_0$, welche der Kondensator kurz vor dem Schließen des

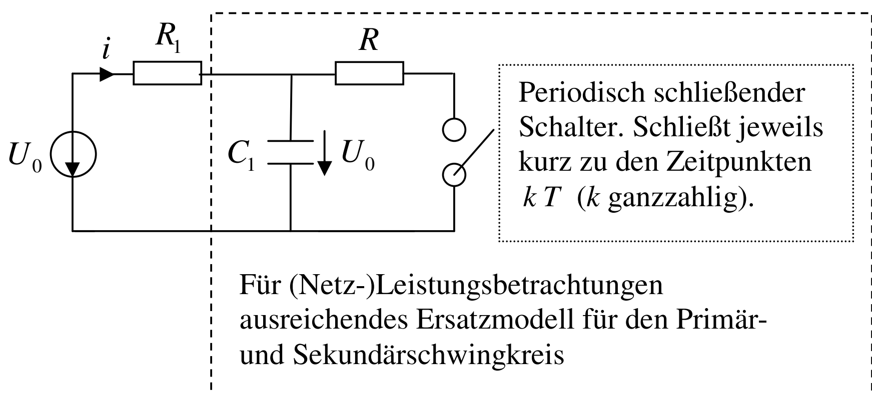
Schalters hat. Denn wenn $\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|$ klein ist, ist auch $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ klein, und die maximale Kondensatorspannung $U_0\left(1+1\Big/\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\right)$ ist groß.

Resistive Strombegrenzung

Nun wird der Fall betrachtet, dass der Primärschwingkreis über einen Widerstand R_1 an die DC-Stromversorgung angekoppelt ist:



Die Rechnung wird wieder mit folgendem vereinfachten (für große C_g näherungsweise gültigen) Ersatzmodell durchgeführt:



Der zeitliche Verlauf des Stroms i ist:

$$i(t)=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{U_0}{R}\,e^{-\frac{t}{R_1C_1}} & \mathit{falls} & 0\le t\le T \\ i(t)=i(t-k\,T) & \mathit{falls} & t \text{ beliebig und } k \text{ ganzzahlig}\end{array}\right\}$$

Der zeitliche Mittelwert $\bar{i}$ des Stroms i beträgt

$$\bar{i} = \frac{U_0 C_1}{T}\left(1 - e^{-\frac{T}{R_1 C_1}}\right)$$

Da $\bar{i}$ proportional zu U_0 ist, stellt sich die Teslaspule aus Sicht der HV-Versorgungseinheit lediglich als Parallelschaltung eines hoch-kapazitiven Kondensators und eines Widerstands mit dem Wert $R_{TC} = \frac{U_0}{\bar{i}} = \frac{T}{C_1\left(1 - e^{-\frac{T}{R_1 C_1}}\right)}$ dar.

Der Effektivwert i_{eff} des Stroms i ist z.B. für die Dimensionierung des Glättungskondensators von Bedeutung und beträgt:

$$i_{eff} = U_0 \sqrt{\frac{C_1\left(1 - e^{-\frac{2T}{R_1 C_1}}\right)}{2 R_1 T}}$$

Die zeitlich gemittelte Nutzleistung P_R, die am Widerstand R (und bei einer realen Teslaspule v. a. in Form von Streamern) verbraucht wird, ergibt sich zu

$$P_R = (U_0)^2 \frac{C_1}{2T}\left(1 - e^{-\frac{T}{R_1 C_1}}\right)^2$$

Die Quelle muss jedoch die Leistung $P_{quell} = U_0 \bar{i}$ aufbringen, welche um die im zeitlichen Mittel am Widerstand R_1 verbrauchte Leistung größer als P_R ist. Der Wirkungsgrad η wird als Nutzleistung / Quellleistung definiert und beträgt:

$$\eta := \frac{P_R}{P_{quell}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{T}{R_1 C_1}}\right) \leq 0{,}5$$

Der zeitliche Verlauf $U_{C1}(t)$ der Spannung am Kondensator C_1 beträgt:

$$\text{Für } 0 \leq t \leq T \text{ gilt: } U_{C1}(t) = \begin{cases} U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}\right) & \textit{falls} \quad 0 \leq t \leq T \\ U_{C1}(t - kT) & \textit{falls} \quad \begin{array}{l} t \text{ beliebig} \\ \text{und } k \text{ ganzzahlig} \end{array} \end{cases}$$

Für beliebige t ergibt sich $U_{C1}(t)$ durch T-periodische Fortsetzung dieser Spannung: $U_{C1}(t + nT) = U_{C1}(t)$ (n ganzzahlig). Der Kondensator hat zum Zeitpunkt, an dem der Schalter schließt bzw. an dem die Funkenstrecke zündet, die größte Spannung.